Konvolucija

Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$y'' + y = g(t), \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \qquad \dots(1)$$

Ako stavimo da je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$, tada primjenjujući Laplaceovu transformaciju na obe strane od (1) dobijamo

$$s^2 Y(s) + Y(s) = G(s)$$

i time

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right) G(s).$$

Tj. Laplaceova transformacija rješenja od (1) je proizvod Laplaceove transformacije od $\sin t$ i Laplaceove transformacije f-je $g(t)$. Ono što bi sad željeli imati je jednostavna formula za $y(t)$ po članovima od $\sin t$ i $g(t)$. Kao što integral proizvoda nije proizvod integrala, $y(t)$ nije proizvod od $\sin t$ i $g(t)$. Međutim, $y(t)$ možemo izraziti kao "konvoluciju" od $\sin t$ i $g(t)$

Definicija Neka su $f(t)$ i $g(t)$ po dijelovima neprekidne na intervalu $[0, \infty)$. Konvoluciju f-ja $f(t)$ i $g(t)$, označavamo sa $f*g$, i definišemo sa

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv$$

(#) Izračunati konvoluciju f-ja t i t^2.

Rj.

$$t*t^2 = \int_0^t (t-2)v^2\,dv = \int_0^t (tv^2 - v^3)\,dv = \frac{t}{3}v^3\Big|_0^t - \frac{1}{4}v^4\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{3}t^4 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{1}{12}t^4$$

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-v)\,g(v)\,dv$$

$f(t) = t$, $g(t) = t^2$

Osobine konvolucije

Neka su $f(t)$, $g(t)$ i $h(t)$ po djelovima neprekidne na intervalu $[0, \infty)$. Tada

(i) $f*g = g*f$,

(ii) $f*(g+h) = (f*g) + (f*h)$,

(iii) $(f*g)*h = f*(g*h)$,

(iv) $f*0 = 0$.

<u>Teorem konvolucije</u> Neka su $f(t)$ i $g(t)$ po djelovima neprekidne na intervalu $[0,\infty)$ i eksponencijalnog reda α. Ako označimo sa $F(s)=\mathcal{L}\{f\}(s)$ i $G(s)=\mathcal{L}\{g\}(s)$ tada

$$\mathcal{L}\{f*g\}(s)=F(s)\,G(s)$$

ili ekvivalentno

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,G(s)\}(t)=(f*g)(t)$$

Drugim riječima

$$\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=f(t)*g(t)$$

(#) Primjenom teoreme o konvoluciji riješiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - y = g(t)$$

tako da zadovoljava uslove

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

gdje je $g(t)$ po dijelovima neprekidna na $[0, \infty)$ i eksponencijalnog reda.

Rj.

$$y'' - y = g(t)$$

Neka je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$. Primjenjujući Laplasovu transformaciju na obe strane date diferencijalne jednačine i koristeći dati uslov imamo

$$s^2 Y(s) - s - 1 - Y(s) = G(s)$$

$$(s^2 - 1) Y(s) = s + 1 + G(s)$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2-1} + \frac{1}{s^2-1} G(s) = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{1}{s^2-1}\right) G(s)$$

iz čega slijedi

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} G(s)\right\}(t)$$

$$= e^t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1} G(s)\right\}(t)$$

Iz elementarne tabele Laplaceovih transformacija znamo da

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sh} t\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}G(s)\right\}(t) = \operatorname{sh} t * g(t)$$

Prema tome

$$y(t) = e^t + \int_0^t \operatorname{sh}(t-v)\,g(v)\,dv$$

je rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom.

(#) Primjenom teoreme o konvoluciji izračunati
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}.$$

Rj. Primjetimo da je
$$\frac{1}{(s^2+1)^2}=\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right).$$

Kako je $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)=\dfrac{1}{s^2+1}$ prema teoremi konvolucije slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)$$
$$=\sin t*\sin t=\int_0^t \sin(t-v)\sin v\,dv=$$

$$=\left|\begin{array}{ll} \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B & \\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B & \sin(t-v)\sin v= \\ \hline \cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B & =\frac{1}{2}(\cos(t-2v)-\cos t) \\ \sin A\sin B=\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B)) & \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\cos(t-2v)}_{=\cos(2v-t)}dv-\frac{1}{2}\int_0^t \cos t\,dv=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2v-t)\Big|_0^t-\frac{1}{2}t\cos t$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin t-\sin(-t)\right)-\frac{1}{2}t\cos t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t).$$

(#) Riješiti integralno-diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-v)\, e^{-2v}\, dv, \quad y(0) = 1.$$

Rj.

Primjetimo da datu jednačinu možemo napisati u obliku

$$y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t} \qquad \ldots (1)$$

Neka je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Primjenjujući Laplaceovu transformaciju na (1) (i uz pomoć teorema konvolucije) dobijamo

$$sY(s) - 1 = \frac{1}{s} - Y(s)\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$sY(s) + \frac{1}{s+2} Y(s) = 1 + \frac{1}{s}$$

$$\left(\frac{s^2+2s+1}{s+2}\right) Y(s) = \frac{s+1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{(s+1)}{s}}{\frac{(s+1)^2}{s+2}} = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Iz čega slijedi $y(t) = 2 - e^{-t}$.

Napisati formulu za opšte rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom

$$y'' + 2y' + 5y = g(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2. \qquad \dots (1)$$

Rj:

Prvo riješimo odgovarajuću diferencijalnu jednačinu čiji su inicijalni uslovi jednaki nuli.

$$y'' + 2y' + 5y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \qquad \dots (2)$$

Neka je $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$ i $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Tada

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 5y\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$s^2 Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{=0} - \underbrace{y'(0)}_{=0} + 2\left(sY(s) - \underbrace{y(0)}_{=0}\right) + 5Y(s) = G(s)$$

$$(s^2 + 2s + 5)Y(s) = G(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

F-ja $H(s)$ se naziva transfer f-ja. Njoj odgovarajuća inverzna Laplaceova transformacija $h(t) := \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t)$ se naziva impulsno odazivna f-ja.

Odredimo inverznu Laplaceovu transformaciju od $H(s)$.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}\right\}(t)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

Sada, kako je

$$H(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = H(s)\,G(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = h*g$$

dobijamo da je $h*g$ rješenje diferencijalne jednačine (2)

$$\left((h*g)(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-v)} \sin(2(t-v))\, g(v)\, dv\right).$$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine (1) je oblika

$$h*g + Y_k$$

gdje je Y_k rješenje odgovarajuće homogene jednačine od (1)

(zato što $\quad (h*g)(0) + Y_k(0) = 0 + Y_0 = Y_0$

$\qquad\qquad\quad (h*g)'(0) + Y_k'(0) = 0 + Y_1 = Y_1 \quad$).

Pa odredimo opšte rješenje odgovarajuće homogene jednačine (3)

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2, \qquad \ldots (3)$$

Karakteristična jednačina je oblika $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

$\Rightarrow$

$$C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t \quad \text{je opšte rješenje od (3).}$$

Birajući koeficijente C_1 i C_2 tako da je zadovoljen dati inicijalni uslov $y(0)=2$, $y'(0)=-2$ dobijamo $Y_k(t) = 2e^{-t}\cos t$

Prema tome formula za rješenje diferencijalne jednačine (1) je

$$(h*g)(t) + Y_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-t+v} \sin(2t-2v)\, g(v)\, dv + 2e^{-t}\cos 2t.$$

Zadaci za vježbu

(1.) Primjenom teoreme o konvoluciji riješiti diferencijalnu jednačinu sa datim uslovom

(a) $y'' - 2y' + y = g(t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

(b) $y'' + 4y' + 5y = g(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

(2.) Primjenom teoreme o konvoluciji odrediti inverznu Laplaceovu transformaciju datih f-ja

(a) $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$ (b) $\dfrac{14}{(s+2)(s-5)}$ (c) $\dfrac{s}{(s^2+1)^2}$

(d) $\dfrac{s}{(s-1)(s+2)}$ (uputa: $\dfrac{s}{s-1} = 1 + \dfrac{1}{s-1}$)

(3.) Odrediti Laplace-ovu transformaciju f-je

$$f(t) := \int_0^t (t-v)e^{3v}\,dv$$

(4.) Riješiti date integralno-diferencijalne jednačine po nepoznatoj f-ji $y(t)$.

(a) $y(t) + 3\int_0^t y(v)\sin(t-v)\,dv = t$

(b) $y(t) + \int_0^t (t-v)y(v)\,dv = 1$

(c) $y(t) + \int_0^t (t-v)^2 y(v)\,dv = t^3 + 3$

(d) $y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v)\sin(t-v)\,dv = -\sin t$, $y(0) = 1$

5. Napisati formulu za rješenje diferencijalne jednačine sa datim uslovom

(a) $y'' + 9y = g(t)$, $y(0) = 2$; $y'(0) = -3$;

(b) $y'' - y' - 6y = g(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$;

(c) $y'' - 2y' + 5y = g(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Odgovori:

1. (a) $2te^{t} - e^{t} + \int_0^t e^{t-v}(t-v)g(v)\,dv$ (b) $\int_0^t g(v)e^{2v-2t}\sin(t-v)\,dv + e^{-2t}\cos t + 3e^{-2t}\sin t$

2. (a) $1-\cos t$ (b) $2e^{5t} - 2e^{-2t}$ (c) $\frac{t}{2}\sin t$

(d) $\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}$

3. $s^{-2}(s-3)^{-1}$

4. (a) $\frac{t}{4} + \frac{3}{8}\sin 2t$ (b) $\cos t$ (c) 3

(d) $e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}$

5. (a) $H(s) = (s^2+9)^{-1}$, $h(t) = \frac{1}{3}\sin 3t$, $y_h(t) = 2\cos 3t - \sin 3t$

$$y(t) = \frac{1}{3}\int_0^t [\sin 3(t-v)]g(v)\,dv + 2\cos 3t - \sin 3t$$

(c) $y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{(t-v)}[\sin 2(t-v)]g(v)\,dv + e^{t}\sin 2t$

(b) $H(s) = (s^2-s-6)^{-1}$, $h(t) = (e^{3t} - e^{-2t})/5$

$y_h(t) = 2e^{3t} - e^{-2t}$

$y(t) = \frac{1}{5}\int_0^t [e^{3(t-v)} - e^{-2(t-v)}]g(v)\,dv + 2e^{3t} - e^{-2t}$